FACULTAD DE CIENCIAS DE OURENSE

ESTADÍSTICA BÁSICA (1º de I.T.I.A.)

Boletín 4. Distribución en el muestreo y Estimación Puntual

1. El tiempo que un empleado tarda en montar un componente electrónico es una v.a. normal de media 6 minutos y varianza 2 min^2. Suponiendo que los tiempos de montaje son v.a. independientes, si un empleado monta 30 componentes:

a) Calcular la probabilidad de que la media muestral de los tiempos de montaje sea inferior a 5 minutos y medio.
b) Calcular la probabilidad de que la varianza muestral sea inferior a 2,6 min^2.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sucedan los dos sucesos anteriores simultáneamente?

2. La autoridad sanitaria de un país decide llevar a cabo una investigación sobre los residuos que producen las empresas de un determinado sector. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 9 empresas y suponiendo que los residuos se distribuyen normalmente con media 23 Tm y desviación típica de 6 Tm., calcular:

a) Probabilidad de que el residuo medio muestral se mantenga entre 18,72 y 25,76 Tm.
b) Probabilidad de que la varianza muestral sea superior a 60,12.
c) Calcular un valor de k tal que $p(S^2 > k) = 0{,}95$.

3. La duración de cierta marca de fusibles sigue una distribución normal de media 1000 horas y desviación típica 100 horas. Se desea enviar una muestra de fusibles de modo que la duración media muestral no difiera de la poblacional en más de 50 horas con una probabilidad muestral de 0'95. Hallar el tamaño de la muestra que se debe enviar.

4. Se desea averiguar el peso medio de una partida de tomates, de los que sabemos que su peso es normal con desviación típica de 100 gramos. ¿De qué tamaño debe de ser una muestra aleatoria simple de dichos tomates para que el peso medio muestral no difiera, en valor absoluto, del real en más de 100 gramos con una probabilidad de 0'95? Con dicho tamaño muestral, ¿cuál es la probabilidad de que la varianza muestral sea superior a 15.625?

5. Si X siguiera una distribución de Poisson(λ), obtener el estimador de máxima verosimilitud de λ .

6. Un secadero artificial presenta una temperatura uniformemente distribuida entre 0 y un máximo δ desconocido. Para estimar aquel valor máximo desconocido se obtiene una muestra aleatoria de 5 temperaturas $X_1,...,X_5$, y se desean probar los estimadores:

$$\delta_1 = \overline{X} \qquad \text{y} \qquad \delta_2 = X_1 + X_2$$

Determinar:

a) si son insesgados.
b) Sus errores cuadráticos medios.
c) Cuál es el mejor estimador puntual de los dos (explica la razón).

7. Sea $X_1,...,X_n$ una muestra aleatoria simple de una población con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha 5^\alpha}{x^{\alpha+1}} & x \geq 5 \\ 0 & x < 5 \end{cases}$$

a) Determinar el estimador de máxima verosimilitud de α .
b) Determinar por el método de los momentos una estimación puntual del parámetro p de una distribución binomial $Bi(n,p)$ contando con una muestra aleatoria simple de tamaño n.

8. Se supone que el precio de los productos vendidos en una tienda en decenas de miles de euros es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad 0 < x < 1, \quad \alpha > 0$$

a) Obtener el estimador máximo verosímil del parámetro α y confirmar que es suficiente (función de un estimador suficiente).
b) Obtener el estimador del parámetro α por el método de los momentos.
c) Si en una muestra aleatoria simple de 5 artículos, los precios en euros fueron: 1000, 7000, 5000, 8000 y 9000, obtener una estimación puntual del parámetro α .

9. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a.s. de una variable aleatoria *X* con función de densidad:

$$f(x)=\frac{\theta}{3^\theta}x^{\theta-1} \quad si\ 0<x<3$$

a) Estimar el parámetro z por máxima verosimilitud.
b) Buscar un estimador para θ por el método de los momentos.

10. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_\theta(x)=\frac{1}{\theta^2}xe^{-x/\theta}, \quad x>0, \quad \theta>0$$

Obtener un estimador del parámetro θ por los métodos de máxima verosimilitud y de los momentos. ¿Son dichos estimadores insesgados?

11. Se toma una muestra aleatoria simple $X_1,\ldots,X_n$ de tamaño *n* de una población $N(\mu,\sigma)$ y se considera como estimador de la media el siguiente:

$$T=k\sum_{i=1}^{n} iX_i$$

Determinar la constante *k* para que el estimador sea insesgado. $\left(\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}\right)$

Resultados *Boletín 4. Distribución en el muestreo y Estimación Puntual*

1. a) *p*=0'0268 **b)** *p* =0'9 **c)** *p* =0'0268*0.9 Por Ser estadísticos independientes
2. a) *p* =0'9 **b)** *p* =0'058 **c)** *k*=10,92
3. $n\geq 16$
4. a) $n\geq 4$ **b)** *p* =0'1

5. $\hat{\lambda}_{MV}=\overline{x}$

6. a) δ_1 no insesgado, δ_2 insesgado **b)** $ECM(\delta_1)=\frac{4\delta^2}{15}$ $ECM(\delta_2)=\frac{\delta^2}{6}$

7. a) $\hat{\alpha}_{MV}=\frac{1}{\frac{\sum \ln x_i}{n}-\ln 5}$ **b)** $\hat{p}_{MTOS}=\frac{\overline{x}}{n}$

8. a) $\hat{\alpha}_{MV}=\frac{1}{-\frac{\sum \ln x_i}{n}}$ **b)** $\hat{\alpha}_{MTOS}=\frac{\overline{x}}{1-\overline{x}}$ **c)** $\hat{\alpha}_{MV}=1'3811$ $\hat{\alpha}_{MTOS}=1'564$

9. a) $\hat{\theta}_{MV}=\frac{n}{n\ln 3-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$ **b)** $\hat{\theta}_{MTOS}=\frac{\overline{x}}{3-\overline{x}}$

10. a) $\hat{\theta}_{MTOS}=\frac{\overline{x}}{2}$ **b)** $\hat{\theta}_{MV}=\frac{\overline{x}}{2}$ **c)** Ambos son insesgados

11. $k=\frac{2}{n(n+1)}$